

SUBIECTUL I

(30 puncte)

5p	1. $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, \bar{z} = a - bi$, iar ecuația devine $-a + 3bi = -b - 1 + ai$ Se obține $a = b + 1$ și $3b = a$, de unde $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$. Deci $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.	2p 3p
5p	2. $\Delta = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$ $\Delta \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că $A \neq \Phi$.	3p 2p
5p	3. $\sqrt{16 + x^2} = 11 - 2x \Leftrightarrow 16 + x^2 = 121 - 44x + 4x^2$ $3x^2 - 44x + 105 = 0$, de unde $x_1 = \frac{35}{3}$, care nu convine, și $x_2 = 3$, care convine.	2p 3p
5p	4. Sunt 34 de elemente în mulțimea A . $C_{34}^0 = 1, C_{34}^1 = 34$ și $C_{34}^2 = 561$. Deci sunt $1 + 34 + 561 = 596$ de submulțimi cu cel mult două elemente.	2p 3p
5p	5. M mijlocul lui AC , $x_M = \frac{a+3}{2}, y_M = 3$ $m_{BD} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = 1, m_{BM} = \frac{6}{a+5}$ B, D, M coliniare $\Leftrightarrow m_{BD} = m_{BM}$, de unde $a = 1$.	3p 2p
5p	6. $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$ $BC^2 = 49, BC = 7$. Deci, $P_{\triangle ABC} = 7 + 3\sqrt{7}$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

5p	1. a) $A^2 = O_2, f(A) = A^2 - 3A + 2I_2 = -3A + 2I_2 = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ $\det(f(A)) = -4 \cdot 8 - 3 \cdot (-12) = 4$	3p 2p
5p	b) $A^2 = O_2, A^n = O_2, \forall n \geq 2$ $I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2025} = I_2 + A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	2p 3p
5p	c) $\det(f(A)) = 4 \neq 0 \Rightarrow f(A)$ inversabilă și $f(X) = f^{-1}(A)$ $f^{-1}(A) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -\frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix}$, iar $(f(X) + B^t)^{2026} = I_2^{2026} = I_2$.	2p 3p
5p	2. a) $2025 * 2 = 2$ și $2 * 2026 = 2$ $2025 * 2 + 2 * 2026 = 2 + 2 = 4$	4p 1p
5p	b) $x * e = x \Leftrightarrow xe - 2x - 2e + 6 = x \Leftrightarrow (e - 3)(x - 2) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $e - 3 = 0$, de unde $e = 3 \in \mathbb{R}$. Cum $3 * x = 3x - 2(3 + x) + 6 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, obținem că $e = 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.	3p 2p

5p	c) $x * 2 = 2, 2 * y = 2$, oricare ar fi $x, y \in R, \frac{4052}{2026} = 2$	3p
	Legea este asociativă, deci $\left(\frac{1}{2026} * \dots * \frac{4051}{2026}\right) * 2 * \left(\frac{4053}{2026} * \dots * \frac{4059}{2026}\right) = x * 2 * y = 2$.	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

5p	1. a) $f'(x) = 2x - 6 - \frac{1}{2(x-3)} = \frac{4(x-3)^2 - 1}{2(x-3)} = \frac{(2x-6)^2 - 1}{2(x-3)}$ $= \frac{(2x-6-1)(2x-6+1)}{2(x-3)} = \frac{(2x-7)(2x-5)}{2(x-3)}$, pentru orice $x \in R$.	3p
		2p
5p	b) $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left(3, \frac{7}{2}\right] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(3, \frac{7}{2}\right]$; $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left[\frac{7}{2}, +\infty\right) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$. Astfel, $x = \frac{7}{2}$ este punct de minim. $f''(x) = \left(2x - 6 - \frac{1}{2(x-3)}\right)' = 2 + \frac{1}{2(x-3)^2} > 0$, pentru orice $x \in (3, +\infty) \Rightarrow$ f este convexă pe $(3, +\infty)$, ceea ce înseamnă că f nu are puncte de inflexiune. Deci, $m = 1 + 0 = 1$.	2p
		3p
5p	c) $f\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{15}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ și cum $x = \frac{7}{2}$ este punct de minim global, atunci $f(x) \geq f\left(\frac{7}{2}\right)$, pentru orice $x \in (3, +\infty) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 - \frac{1}{2} \ln(x-3) \geq -\frac{15}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 35 \geq 2 \ln(x-3) + 2 \ln 2$ $\Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 35 \geq 2 \ln(2x-6), \forall x \in (3, +\infty)$.	3p
		2p
5p	2. a) F este derivabilă și $F'(x) = (2x^2 + \ln x + 2025)' = 4x + \frac{1}{x} = \frac{4x^2 + 1}{x} =$ $= f(x), \forall x \in (0, +\infty)$. Deci, F este o primitivă a funcției f .	3p
		2p
5p	b) $G(x) = \int f(x) dx = \int \frac{4x^2 + 1}{x} dx = 2x^2 + \ln x + C$ $G(1) = 2$, de unde $C = 0$, iar $G(x) = 2x^2 + \ln x$.	3p
		2p
5p	c) H primitivă a funcției $f \Rightarrow H'(x) = f(x), \forall x \in (0, +\infty)$ Cum $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x} > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, rezultă că $H'(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow H$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$. $\sqrt[3]{2025}, \sqrt[3]{2026} \in (0, +\infty)$ și $\sqrt[3]{2025} < \sqrt[3]{2026}$, de unde $H(\sqrt[3]{2025}) < H(\sqrt[3]{2026})$.	2p
		3p

Scoala in Papuci